数理解析研究所講究録
第 1813 巻 2012 年 193-203

Relations among multiple Hecke L-values

浦項工科大学校　井原健太郎
(Kentaro Ihara, POSTECH)

1 はじめに

この原稿では多重 Hecke L-関数の特殊値に関する最近の結果 [1, 4, 5] を要約・解説する. 以下記号の導入も兼ねて, この研究の概略とこの原稿の構成を述べる.

Γ を $SL_2(\mathbf{Z})$ の合同部分群とし $\mathbf{H}=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathrm{Im}\, z>0\}$ を複素上半平面とする. $f(z)$ を $\mathbf{H}$ 上の Γ に関する重さ $k\in\mathbf{Z}$ の正則カスプ形式とする. つまり $f(z)$ は

$$f(\gamma z)=(cz+d)^k f(z), \quad \gamma=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma \tag{1}$$

を満たし (但し $\gamma z=(az+b)/(cz+d)$ は Γ の $\mathbf{H}$ 上への 1 次分数変換による左作用), 更にカスプ条件 (§2 の条件 (ii)) を満たす $\mathbf{H}$ 上の正則関数である. よく知られた次の等式が出発点になる：

$$\int_{i\infty}^{0} f(z)\, z^{s-1}dz=-\Gamma(s)L(f,s). \tag{2}$$

ここで左辺は $f(z)$ の虚軸上の広義積分で $f(z)$ の Mellin 変換と呼ばれる. 右辺に現れたのはガンマ関数 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{s-1}dt$ と $f(z)$ に付随する Hecke L-関数 (保型 L-関数) $L(f,s):=(-2\pi i)^{-s}\sum_{m=1}^{\infty}c_m m^{-s}$, ($\mathrm{Re}\, s\gg 0$) である. ここで c_m は Fourier 展開 $f(z)=\sum_{m>0}c_m q^m$, ($q=e^{2\pi iz}$) の m 番目の係数で, L-関数は便宜的に $(-2\pi i)^{-s}$ で正規化してある. (複素数 z の冪は $-\pi/2\leq \arg z<3\pi/2$ で定義) 右辺の符号 $-$ は (後述の Manin の論文に倣い) $i\infty$ を積分の基点に取ったためである. (2) の左辺の積分は $f(z)$ がカスプ条件を満たすことから任意の複素数 s に対して収束し整関数を定め, これより $L(f,s)$ の解析接続がなされる. 更に $\Gamma=\Gamma_0(N)=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbf{Z})\mid c\equiv 0 \pmod{\mathrm{N}}\}$ (Hecke 群) のときなどは (2) を用いて $L(f,s)$ の関数等式が示される. つまり (2) は $L(f,s)$ の解析的性質を捉える基本的な式である. 更には (2) の左辺の積分の臨界点 $s=1,\ldots,k-1$ での値は $f(z)$ の周期と呼ばれ保型形式の周期理論の中で基本的な役割を果たす数である. 周期理論の詳細に関しては [8, 9, 7, 15] などが, またその幾何的な (Sato-Kuga 多様体の周期としての) 解釈については [16] が参考になる.

2005 年頃に Manin は (2) の積分を反復積分を用いて一般化し (§2 定義 1 参照) [10, 11], その反復積分の整数点での値をある多重 Dirichlet 級数を用いて記述した. ただ,

そこでは多重 Dirichlet 級数の収束性を仮定した上での議論がなされていたが, [1] に於いて, Choie-Ihara は多重 Hecke L-関数を導入・解析接続し (§2 の定義 2) Manin の反復積分を多重 Hecke L-関数の線形和として記述した (§2 の定理 1 上段). (多重 Hecke L-関数は Manin の多重 Dirichlet 級数と本質的には同じもの, またこの関数はより以前に松本-谷川 [12] によって解析接続を含めその解析的性質が調べられていた). この等式は全平面で成立する関数としての等式で, Manin の結果を拡張したものである. また逆に多重 L-関数を反復積分で表すこともできる (定理 1 下段). いずれの表示も (2) の反復版或いは多重版の拡張といえる式である.

定理 1 の両式は, いずれも反復積分と多重 Dirichlet 級数の間に成立している等式であり, 本研究集会のテーマである多重ゼータ値の反復積分表示に極めて状況が類似している. 上記の Manin の論文でも, 多重ゼータ値の研究の類似の探求を動機としていることが冒頭に書かれている. (拙著だが上記の Manin の論文の紹介が [6] にある). そこで, この原稿では多重ゼータ値の関係式探しに対応する多重 Hecke L-値の関係式を探した文献 [4, 5] の結果を紹介したい. これらは多重ゼータ値の空間の次元に関する Zagier 予想, 多重ゼータ値の生成する環の構造などの類似を探すために始めた研究である.

この原稿では先ず §2 で, Manin による保型形式の反復周期積分と多重 Hecke L-関数を定義して, Ihara-Choie [1] による両者の明示関係を述べる. §3 では Manin によって設定された反復積分と非可換巾級数の一般的な関係を復習する. そして §4, 5 では反復周期積分の値 (=多重 Hecke L-値) が生成する空間や代数構造に関する [4, 5] の結果を紹介する.

この研究テーマは上記の Manin の論文に始まるが, 多重ゼータ値の理論と保型形式の理論の交差するとても面白い領域に思われる. まだ研究は始まったばかりだが, これから研究を深められればと考えている.

2 反復積分と多重 L-関数

この節では Manin により導入されたカスプ形式の反復積分と, 松本-谷川および Choie-Ihara により考察された多重 L-関数の定義を復習した後で, [1] で示した, Manin の積分の多重 L-関数による表示を述べる.

上半平面上の正則関数 $f : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{C}$ に関する次の 2 条件を考えよう:
(i) $f(z)$ は $\mathbf{H}$ 上の周期 1 の周期関数で, 次の形の Fourier 展開表示を持つ

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m q^m \qquad q = e^{2\pi i z},\ z \in \mathbf{H}.$$

更に c_m は $m \to \infty$ に関して高々多項式オーダーとする: $c_m = O(m^M), \exists M > 0$.
(ii) 任意の $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$ に対して正の定数 $C > 0$ と整数 k が存在して次を満たす

$$(f|_k\gamma)(z) := (cz+d)^{-k} f(\gamma z) = O(e^{2\pi i C z}), \quad z \to i\infty.$$

例えば $S_k(\Gamma)$ を合同部分群 Γ に関する重さが $k \in \mathbf{Z}$ の正則カスプ形式の空間とするとき Γ が平行移動の行列 $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ を含んでいるとすると, $f(z) \in S_k(\Gamma)$ は上の2つの条件を満たす. この場合 $c_m = O(m^{k/2})$ を満たすことが知られている. 以下暫くは, 登場する関数には条件 (i) や (ii) を仮定して, 保型性 (1) は要求しない.

定義 1 (Manin [10, 11]) $f_1, \ldots, f_n$ を上の条件 *(ii)* を満たす $\mathbf{H}$ 上の正則関数たちとする. 複素変数 $s_1, \ldots, s_n$ と $a, z \in \overline{\mathbf{H}} := \mathbf{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ に対して, a から z への道に沿う反復積分を

$$I_a^z\left(\begin{smallmatrix} s_1, & \ldots, & s_n \\ f_1, & \ldots, & f_n \end{smallmatrix}\right) := \int_a^z f_1(z_1) z_1^{s_1-1} dz_1 \int_a^{z_1} f_2(z_2) z_2^{s_2-1} dz_2 \cdots \int_a^{z_{n-1}} f_n(z_n) z_n^{s_n-1} dz_n.$$

と定める.

積分路の端点 a や z がカスプである場合, つまり $a, z \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ の場合も, 条件 (ii) より被積分関数 $f_r(z_r){z_r}^{s_r-1}$ は z_r がカスプに近づくとき指数的に絶対値が小さくなるので積分の収束が保証される. $\mathbf{H}$ の単連結性からこの積分は a と z を繋ぐ道の選び方に寄らない. そして $z \in \mathbf{H}$ 及び $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{C}^n$ に関して正則な関数を定義する.

$n = 1, a, z \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}), f_(z)$ が重さ k のカスプ形式の場合, 臨界点 $s_1 = 1, \ldots, k-1$ での 積分値は Kuga-Sato 多様体の「周期」としての解釈が知られている [15]. また f_r が重さ 2 の場合は Ichikawa [3] により motivic な解釈が与えられている.

定義 2 ([12, 1]) $f_1, \ldots, f_n$ を上の条件 *(i)* を満たす $\mathbf{H}$ 上の正則関数たちとし, その *Fourier* 展開を $f_r(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(r)} q^m$ $(1 \leq r \leq n)$ としよう. 実部の十分おきな複素数 $s \in \mathbf{C}$ と任意の $\alpha_r \geq 1$ に対して, 多重 *Hecke L*-関数を次で定義する：

$$L\left(\begin{smallmatrix} s, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \\ f_1, & f_2, & \ldots, & f_n \end{smallmatrix}\right) = L(s) := (-2\pi i)^{-(s+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)} \sum_{\substack{m_1 > \cdots > m_n > 0 \\ (m_{n+1} := 0)}} \frac{c_{m_1-m_2}^{(1)} \cdots c_{m_n-m_{n+1}}^{(n)}}{m_1^s m_2^{\alpha_2} \cdots m_n^{\alpha_n}}.$$

f_r たちが条件 (i) を満たすことから, 定数 $M > 0$ が存在して $|c_{m_1-m_2}^{(1)} \cdots c_{m_n-m_{n+1}}^{(n)}| = O(m_1^M)$ を満たすことになる. 従って $L(s)$ は領域 $\mathrm{Re}(s) > M+1$ で絶対収束する. [1] に於いて, 任意の正整数 $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ に対して $L(s)$ が整関数として解析接続されることが示されている. より一般に, 松本-谷川 [12] によって $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を複素変数とみての $\mathbf{C}^n$ への整関数としての解析接続が証明されている.

次の等式は (2) の多重版であり Manin [11] の §3 で残されていた課題を解決している.

定理 1 ([1]) 任意の $\alpha_r \geq 1$ に対して, 次が成立する.

$$I_{i\infty}^{0}\begin{pmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ f_1, \dots, f_n \end{pmatrix} = \Gamma^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{\substack{0\leq j_r<\alpha_r+j_{r+1} \\ (2\leq\forall r\leq n) \\ j_1=j_{n+1}:=0}} \prod_{l=2}^{n} \binom{\alpha_{l-1}+j_l-1}{j_l} L\begin{pmatrix} \alpha_1-j_1+j_2, & \dots, & \alpha_n-j_n+j_{n+1} \\ f_1, & \dots, & f_n \end{pmatrix},$$

$$L\begin{pmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ f_1, \dots, f_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Gamma^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}} \sum_{\substack{0\leq j_r<\alpha_r \\ (2\leq\forall r\leq n) \\ j_1=j_{n+1}:=0}} \prod_{l=2}^{n} (-1)^{j_l} \binom{\alpha_l-1}{j_l} I_{i\infty}^{0}\begin{pmatrix} \alpha_1-j_1+j_2, & \dots, & \alpha_n-j_n+j_{n+1} \\ f_1, & \dots, & f_n \end{pmatrix}$$

但し $\Gamma^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = (-1)^n\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_n)$ とする. 更に一般に, 上の各々の式に於いて α_1 を複素変数 s に置き換えた, 関数としての等式が成立する.

証明については [1] を参照.

3 非可換巾級数と反復積分

ここでは Manin [11] の §5 で調べられた反復積分と非可換巾級数との関係を復習する. この節の結果が §5 で利用される. これは Drinfel'd [2] が KZ 方程式の性質を調べるのに用いた手法が原型となっている.

今 $A_V := (A_v | v \in V)$ を, 有限集合 V で添字付けられた文字の集合とする. $\omega_V := (\omega_v | v \in V)$ にて, ある合同部分群に関するカスプ形式 $f_v(z)$ と複素数 s_v により, $\omega_v := f_v(z)z^{s_v-1}dz$ の形に表される正則 1-形式の組を表すことにする. A_V で生成される非可換巾級数を $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ で表し, $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ に余積代数射 $\Delta : \mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle \longrightarrow \mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle \otimes \mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ を $\Delta(A_v) = 1 \otimes A_v + A_v \otimes 1$, $(v \in V)$ で定義しよう. 任意の $a, z \in \overline{\mathbf{H}}$ に対して巾級数 J_a^z を

$$J_a^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(v_1,\dots,v_n)\in V^n} I_a^z(\omega_{v_1}, \dots, \omega_{v_n}) A_{v_1} \cdots A_{v_n} \in \mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$$

と定義する. 但し

$$I_a^z(\omega_{v_1}, \dots, \omega_{v_n}) = \int_a^z \omega_{v_1}(z_1) \int_a^{z_1} \omega_{v_2}(z_2) \cdots \int_a^{z_{n-1}} \omega_{v_n}(z_n).$$

J_a^z に関して次の二つの性質が基本的である. 一つは [11] の命題 1.2 及び 1.4.1 で示されている巡回性: $J_b^z = J_a^z J_b^a$ で, もう一つは J_a^z が群的元, 即ち $\Delta(J_a^z) = J_a^z \otimes J_a^z$ が成立することである. 巡回性は, 通常の積分だと積分区間に関する加法性に相当する. また一般に $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ の元 J が群的元であることと, J の係数族が「シャッフル積」で閉じていることが同値であることが知られている. これらの性質を確かめる際に鍵となるのは次の事実である. J_a^z を a を固定し z の関数 $(J_a : \overline{\mathbf{H}} \longrightarrow \mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle; z \mapsto J_a^z)$ とみなすと次の 1 階の微分方程式を満たしている：

$$\frac{d}{dz}J_a^z = (\sum_{v\in V} f_v(z)z^{s_v-1}A_v)J_a^z.$$

逆にこの方程式の解空間は 1-次元の $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$-加群である.

追加の仮定として ω_V が線形独立な微分形式から構成されているとしよう. $\mathbf{H}$ 上の正則自己同型 γ に対し, ω_V 上の引き戻し作用を γ^* で表す. 上記の仮定の下, ω_V の張る線形空間と A_V の張る線形空間を互いの双対空間とみなして, 作用 γ^* の随伴作用を γ_* と表すことにする：

$$(\gamma^*\omega_v, A_u) = (\omega_v, \gamma_* A_u), \qquad u, v \in V \tag{3}$$

但し記号 $(-,-)$ は $(\omega_v, A_u) := \delta_{u,v}$ (Kronecker デルタ) で定義される内積である. 作用 γ_* を代数射として $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ に延長することにする. 通常の積分に於ける変数変換則は, 反復積分に於いては, 以下のように一般化される ([11] の (1.10) 参照)：

$$J_{\gamma a}^{\gamma z} = \gamma_*(J_a^z).$$

4 周期の空間

Γ を $SL_2(\mathbf{Z})$ の合同部分群として k を非負整数とする. $S_k(\Gamma)_{\mathbf{Q}}$ で Fourier 係数が有理数のカスプ形式からなる $\mathbf{Q}$-線形空間を表すことにして, $S_k(\Gamma)_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} = S_k(\Gamma)$ が成立することを仮定しよう. 例えばレベル N の Hecke 群 $\Gamma = \Gamma_0(N)$ は任意の k に対してこの仮定を満たす. 今 $n \geq 1$ に対して $\mathbf{Q}$-線形空間 $\mathcal{P}_n(S_k(\Gamma))$ を次で定義して, $S_k(\Gamma)$ に関する n 次の周期の空間と呼ぶことにする (幾何的な意味で周期と呼んでいいかどうかは不明だが)：

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(S_k(\Gamma)) := \langle I\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1, & \dots, & \alpha_n \\ f_1, & \dots, & f_n\end{smallmatrix}\right) \mid 1 \leq \forall\alpha_r \leq k-1,\ \forall f_r \in S_k(\Gamma)_{\mathbf{Q}} \rangle_{\mathbf{Q}}. \tag{4}$$

つまり反復数が n 回の反復積分の値 $I\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1, & \dots, & \alpha_n \\ f_1, & \dots, & f_n\end{smallmatrix}\right) := I_{i\infty}^{0}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1, & \dots, & \alpha_n \\ f_1, & \dots, & f_n\end{smallmatrix}\right)$ で生成される $\mathbf{Q}$-線形空間で α_r は臨界点を渡り f_r $(r = 1, \dots, n)$ は $S_k(\Gamma)_{\mathbf{Q}}$ を渡る. もし $S_k(\Gamma)_{\mathbf{Q}}$ の $\mathbf{Q}$-基底 $\mathcal{B}$ を一つ取り $d := |\mathcal{B}| = \dim S_k(\Gamma)_{\mathbf{Q}}$ とすると, 反復積分の多重線形性から

$$\mathcal{P}_n(S_k(\Gamma)) = \langle I\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1, & \dots, & \alpha_n \\ f_1, & \dots, & f_n\end{smallmatrix}\right) \mid 1 \leq \forall\alpha_r \leq k-1,\ \forall f_r \in \mathcal{B} \rangle_{\mathbf{Q}}. \tag{5}$$

となるので $\mathcal{P}_n$ の次元は自明に $(d(k-1))^n$ で上から抑えられる. 次に次数付き線形空間 $\mathcal{P}(S_k(\Gamma))$ を

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(S_k(\Gamma)) := \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{P}_n(S_k(\Gamma))$$

で定義し（但し $\mathcal{P}_0(S_k(\Gamma)) := \mathbf{Q}$ ）$S_k(\Gamma)$ に関する周期環と呼ぶことにする（次の命題で $\mathcal{P}$ に環構造が入ることが分かる）. ここで直和は形式的な直和として定義しており, 実際に $\mathbf{C}$ の部分空間として直和かどうか（つまり異なる次数の周期の間に $\mathbf{Q}$-線形関係があるか否か）は定かでない. 今のところ数値実験などではそのような例は見つかっていない.

命題 1 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S_k(\Gamma))$ は次数付きの $\mathbf{Q}$-代数構造をもつ.

この主張は下記の反復積分のもつシャッフル積構造から直ちに従う：

$$I\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ f_1, \dots, f_n\end{smallmatrix}\right) I\left(\begin{smallmatrix}\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+n'} \\ f_{n+1}, \dots, f_{n+n'}\end{smallmatrix}\right) = \sum_{\sigma \in Sh_{n,n'}} I\left(\begin{smallmatrix}\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(n+n')} \\ f_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, f_{\sigma^{-1}(n+n')}\end{smallmatrix}\right)$$

但し $Sh_{n,n'}$ は次数 $n+n'$ の対称群 $S_{n+n'}$ の部分集合で次で定義される：

$$Sh_{n,n'} = \{\sigma \in S_{n+n'} \mid \sigma(1) < \cdots < \sigma(n),\ \sigma(n+1) < \cdots < \sigma(n+n')\}.$$

多重ゼータの理論のように $\mathcal{P}$ の構造や幾何的な意味をは何かと考えるのは自然な問いに思える. 例えば, $I\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ f_1, \dots, f_n\end{smallmatrix}\right)$ の間の具体的な関係式を探したり $\mathcal{P}_n$ の次元や $\mathcal{P}$ の代数としての構造などを調べることは基本的なことだろう.

5 $\mathcal{P}(S_2(\Gamma_0(N)))$ の次元（数値実験）

この節ではカスプ形式の重さが 2 の場合に $S_2(\Gamma_0(N))$ に付随する周期環 $\mathcal{P}(S_2(\Gamma_0(N)))$ がどのような構造になっているかをレベル N が小さい場合に数値計算で調べてみる. この場合, 周期の空間の定義を再記すると

$$\mathcal{P}_n(S_2(\Gamma_0(N))) := \left\langle I\left(\begin{smallmatrix}1, \dots, 1 \\ f_1, \dots, f_n\end{smallmatrix}\right) \mid \forall f_r \in S_2(\Gamma_0(N))_{\mathbf{Q}} \right\rangle_{\mathbf{Q}}$$

但し

$$I\left(\begin{smallmatrix}1, \dots, 1 \\ f_1, \dots, f_n\end{smallmatrix}\right) = \int_{i\infty}^{0} f_1(z)dz \int_{i\infty}^{z} \cdots \int_{i\infty}^{z} f_n(z)dz = (-1)^n L\left(\begin{smallmatrix}1, \dots, 1 \\ f_1, \dots, f_n\end{smallmatrix}\right)$$

である. この節では, 小さいレベル N に対して具体的に $S_2(\Gamma_0(N))$ の基底を一つ決めて, 値 $I\left(\begin{smallmatrix}1, \dots, 1 \\ f_1, \dots, f_n\end{smallmatrix}\right)$ の近似値を計算機を用いて計算し, それらの値の間の $\mathbf{Q}$-線形関係を調べて $\mathcal{P}_n(S_2(\Gamma_0(N)))$ の次元を求めそこから周期環 $\mathcal{P}$ の構造を観察する. この節の結果は, 少し実験結果を追加して [5] を準備中である.

周期の空間の次元の計算手順

1. まずカスプ形式の空間 $S_2(\Gamma_0(N))_{\mathbf{Q}}$ の基底 $\langle h_j \rangle_{j=1}^{d}$ で Fricke 対合 $w_N = \left(\begin{smallmatrix}0 & -1 \\ N & 0\end{smallmatrix}\right)$ に関して固有関数となっているものを Fourier 展開の形で構成する. 実際は Sage Notebook v4.6 [14] を用いて基底を計算し, それを対角化して固有関数 $h_j = \sum c_m^{(j)} q^m$ を得る.

2. $c = \frac{i}{\sqrt{N}}$ を Fricke 対合の固定点とし

$$I_{i\infty}^{c}(j_1, \dots, j_n) := \int_{i\infty}^{c} h_{j_1}(z)dz \int_{i\infty}^{z} \cdots \int_{i\infty}^{z} h_{j_n}(z)dz$$

を計算する. 各 $h_j = \sum c_m^{(j)} q^m$ を上の積分に代入して項別積分で計算する. 積分の端点を c (0 ではなく) にしているので積分の収束が早く効率的に計算可能である.

3. 周期 $I(j_1,\ldots,j_n) := \int_{i\infty}^{0} h_{j_1}(z)dz \int_{i\infty}^{z} \cdots \int_{i\infty}^{z} h_{j_n}(z)dz$ を $I_{i\infty}^{c}(j_1,\ldots,j_n)$ らを用いて表す. 実際 §3 の母関数とその性質を用いて

$$J = J_{i\infty}^{0} = J_{c}^{0} J_{i\infty}^{c} = J_{w_N c}^{w_N i\infty} J_{i\infty}^{c} = (w_{N*} J_{c}^{i\infty}) J_{i\infty}^{c} = w_{N*} (J_{i\infty}^{c})^{-1} J_{i\infty}^{c}$$

が成立つ. ここで h_j が固有関数であることを用いて w_{N*} を計算することができるので両辺の巾級数の係数を比較することで $I(j_1,\ldots,j_n)$ の $I_{i\infty}^{c}(j_1,\ldots,j_n)$ 達による表示が得られる. この表示から, 予め計算してある $I_{i\infty}^{c}(j_1,\ldots,j_n)$ 達の値を用いて $I(j_1,\ldots,j_n)$ を計算できる. （**2** と **3** の計算は Mathematica [18] を用いて計算した. ）

4. 計算済みの $I(j_1,\ldots,j_n)$ の近似値を用いてその $\mathbf{Q}$ 上の線形関係を探し（実際はソフト PARI/GP [13] のコマンド"lindep"を用いて線形関係を見つけ）, $\mathcal{P}_n(S_2(\Gamma_0(N)))$ の次元がどこまで抑えられるかを調べる.

下記の表は, 上の手順に従って $\dim S_2(\Gamma_0(N)) = 2$ が成り立つレベル N に対して, つまり 8 通りのレベル $N = 22,28,37,23,26,29,31,51$ に対して $d_n := \dim \mathcal{P}_n(S_2(\Gamma_0(N)))$ を数値的に計算したものである.

次数 n	F-固有値	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
自明な上限		2	4	8	16	32	64	128	256	$\cdots$
(1) : $N = 22,28,37$	$(-1,1)$	1	2	3	6	10	19	34	65	$\cdots$
(2) : $N = 23,26,29,31$	$(-1,-1)$	2	3	6	9	18	30	60	102	$\cdots$
(3) : $N = 50$	$(-1,-1)$	2	2	4	6	12	21	42	72 ?	$\cdots$

Table: $\mathcal{P}_n(S_2(\Gamma_0(N)))$ の次元の表

1 段目は次数 n (積分の反復数), 2 段目は次元の自明な上限 $(d(k-1))^n$, 3 段目, 4 段目, 5 段目はレベルがそれぞれ $N = 22,28,37$, $N = 23,26,29,31$, $N = 50$ の場合の d_n の値である. 順に, クラス (1), (2), (3) と呼ぶことにする. 2 列目の 'F-固有値' には Fricke 対合が 2 次元のカスプ形式の空間 $S_2(\Gamma_0(N))$ に作用する際の固有値を表示している.

レベルが異なっていても周期の空間の次元が一致していることがあり, 3 つのクラスに分かれることが観察できる. この違いには Fricke 対合の固有値が大きく影響しているように思えるが, クラス (2), (3) では固有値は等しいにも関わらず別の数列が現れている.

例 ($S_2(\Gamma_0(50))$) の周期の空間の次元計算)
ここではクラス (3) の場合を例にとって上の計算手続きを追ってみる. 手順 **1**: 空間 $S_2(\Gamma_0(50)))_{\mathbf{Q}}$ は 2 次元でその基底で Fricke 対合に関する固有関数になっているものとして次の h_1, h_2 が選べる.

$$h_1(z) = q + q^4 - q^6 - 2q^9 - 3q^{11} - 2q^{14} + q^{16} + 5q^{19} + 2q^{21} - q^{24} + O(q^{25})$$
$$h_2(z) = q^2 - q^3 - 2q^7 + q^8 - q^{12} + 4q^{13} + 3q^{17} - 2q^{18} - 3q^{22} - 6q^{23} + O(q^{25})$$

この計算は Sage Notebook v4.6 [14] を用いて「CuspForms(50,2,prec=300).basis()」と入力すると $S_2(\Gamma_0(50)))$ の基底を Fourier 展開の形で q^{300} の精度で（瞬時に）出力する. (Sage の使い方は Stein の本 [17] がとても参考になる.) その後, 対角化して Fricke 対合に関する固有関数 h_1, h_2 を構成した (今の $N = 50$ の場合, Sage の出力は偶然固有関数になっている).

次に手順 **2,3** に従い周期を計算する. 下には次数 3 以下の周期の近似値を書いている. 実際の計算では, 高次の周期の線形関係を探すときにある程度の精度が必要なので 350 桁精度で近似値を求めた.

$$
\begin{aligned}
I(1) &= -0.13289248417579683316411100765511989180577178908661509\ldots \times i\\
I(2) &= -0.01938875214144366894804458930388001424454769199229239\ldots \times i\\
I(1,1) &= -0.008830206175207205853964554734297037659555303220391\ldots\\
I(1,2) &= -0.001288309718572624869024492557713405211655419039060\ldots\\
I(2,1) &= -0.001288309718572624869024492557713405211655419039060\ldots\\
I(2,2) &= -0.000187961854801168229206893169696798822032630053033\ldots\\
I(1,1,1) &= 0.000391156011469249027473431622572146415146415643726 \times i\\
I(1,1,2) &= 0.000051227976842672937916543669392916750657908309868 \times i\\
I(1,2,1) &= 0.000068750725203591946071366672606597261770179014200 \times i\\
I(1,2,2) &= 0.000009304082080740383669901142420296605123481059657 \times i\\
I(2,1,1) &= 0.000051227976842672937916543669392916750657908309868 \times i\\
I(2,1,2) &= 0.000006370553653336903571080927189982885915760387070 \times i\\
I(2,2,1) &= 0.000009304082080740383669901142420296605123481059657 \times i\\
I(2,2,2) &= 0.000001214781938261958157242824273867303351020636922 \times i
\end{aligned}
$$

次に手順 **4** に則り PARI/GP で **Q**-線形関係を探すと次を得る.
2 次の周期間の関係式 (2 個):

$$I(1,2) = I(2,1), \quad I(1,1) - 7I(1,2) + I(2,2) \stackrel{?}{=} 0.$$

3 次の周期間の関係式 (4 個):

$$
\begin{aligned}
&I(1,1,2) = I(2,1,1), \quad I(1,2,2) = I(2,2,1),\\
&3I(1,1,1) - 14I(1,1,2) - 7I(1,2,1) + 2I(1,2,2) + I(2,1,2) \stackrel{?}{=} 0,\\
&7I(1,1,1) - 32I(1,1,2) - 16I(1,2,1) + I(2,2,2) \stackrel{?}{=} 0
\end{aligned}
$$

4 次の周期間の関係式 (10 個):

$$
\begin{aligned}
&I(1,1,2,1) = I(1,2,1,1), \quad I(1,1,1,2) = I(2,1,1,1),\\
&I(1,1,2,2) = I(2,2,1,1), \quad I(1,2,2,2) = I(2,2,2,1),\\
&I(1,2,1,2) = I(2,1,2,1), \quad I(2,1,2,2) = I(2,2,1,2),\\
&-2I(1,1,2,2) + I(1,2,2,1) + I(2,1,1,2) \stackrel{?}{=} 0,\\
&-6I(1,1,1,1) + 21I(1,1,1,2) + 21I(1,1,2,1) - 4I(1,1,2,2) - 2I(1,2,1,2) \stackrel{?}{=} 0,\\
&14I(1,1,1,1) - 48I(1,1,1,2) - 48I(1,1,2,1) + I(1,2,2,2) + I(2,1,2,2) \stackrel{?}{=} 0,\\
&-96I(1,1,1,1) + 329I(1,1,1,2) + 329I(1,1,2,1) - 2I(2,2,2,2) \stackrel{?}{=} 0.
\end{aligned}
$$

?のついていない等式は Fricke 対合の性質から実際に証明できる: $I(j_1,\dots,j_n) = I(j_n,\dots,j_1)$. 観察では?のついている等式も 2 次の?のついた等式が示せれば, 後はシャッフル積を用いて示せそうである. □

最後に, 以上の観察から得られる次元数列の予想を述べよう. 各 $i = 1,2,3$ に対して数列 $D_n^{(i)}$ を

$$
D_n^{(1)} := \frac{1}{2n}\sum_{\substack{d|n\\ d:\mathrm{odd}}} \mu(d)2^{n/d},\quad D_n^{(2)} := \frac{1-(-1)^n}{4n}\sum_{d|n}\mu(d)2^{n/d},\quad D_n^{(3)} := \begin{cases} D_n^{(2)} & n \neq 2,\\ -1 & n = 2\end{cases}
$$

と定義する. 小さい n に対する $D_n^{(i)}$ の表は次のようになる.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
$D_n^{(1)}$	1	1	1	2	3	5	9	16	28	51	93	170	315	$\cdots$
$D_n^{(2)}$	2	0	2	0	6	0	18	0	56	0	186	0	630	$\cdots$
$D_n^{(3)}$	2	-1	2	0	6	0	18	0	56	0	186	0	630	$\cdots$

Table: $D_n^{(i)}$ の表

予想 周期環 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S_2(\Gamma_0(N)))$ は次の代数構造を持つだろう:
(i) クラス (1) の場合, $\mathcal{P}$ *は各* n *次斉次に* $D_n^{(1)}$ *個の (代数としての) 生成元をもつ自由な次数代数 (多項式代数) である.*
(ii) クラス (2) の場合, $\mathcal{P}$ *は各* n *次斉次に* $D_n^{(2)}$ *個の生成元をもつ自由な次数代数である.*
(iii) クラス (3) の場合, $\mathcal{P}$ *は各* n *次斉次に* $D_n^{(2)}$ *個の生成元をもつ自由な次数代数を, 次数 2 の 1 つの元が生成するイデアルで割った商代数と同型である.*

この予想が正しいとすると各 $i=1,2,3$ に対して $d_n^{(i)} := \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}_n$ は次の式で与えられることになる：

$$\prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1-x^n)^{D_n^{(i)}}} = \sum_{n\geq 0} d_n^{(i)} x^n.$$

謝辞

計算ソフト Sage の利用に関して九大大学院の田坂浩二さんに色々と協力を頂きました. また代表の大野泰生さんには集会中を通してお世話を頂きました. 両者に深くお礼申し上げます.

参考文献

[1] Y. Choie, K. Ihara, *Iterated period integrals and multiple Hecke L-functions*, preprint, (2010).

[2] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, translation in Leningrad Math. J., 829–860, (1991).

[3] T. Ichikawa, *Motives for elliptic modular groups*, arXiv:0909.5277v1, 29, Sep (2009).

[4] K. Ihara, *Special values of multiple Hecke L-functions*, preprint, (2010).

[5] K. Ihara, *Algebra structure of period spaces of weight two cusp forms*, 準備中.

[6] K. Ihara, *Iterated integrals and noncommutative modular symbols – survey of Y.I.Manin's paper* (in Japanese), Proceeding of the 3rd Fukuoka su-ron shukai, (2008).

[7] W. Kohnen, D. Zagier, *Modular forms with rational periods*, Modular forms (Durham, 1983), 197–249, Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., Horwood, Chichester, (1984).

[8] Y. I. Manin, *Parabolic points and zeta functions of modular curves*. Math. USSR-Izv., **6**, 19–64, (1972).

[9] Y. I. Manin, *Periods of cusp forms, and p-adic Hecke series*. Math. USSR-Sb., **92**, 371–393, (1973).

[10] Y. I. Manin, *Iterated Shimura integrals*, Mosc. Math. J., **5**, 869–881, (2005).

[11] Y. I. Manin, *Iterated integrals of modular forms and noncommutative modular symbols*, Progr. Math., **253**, Birkhäuser, (2006).

[12] K. Matsumoto,Y. Tanigawa, *The analytic continuation and the order estimate of multiple Dirichlet series*, J. Theor. Nombres Bordeaux **15**, 267–274, (2003).

[13] PARI/GP, version 2.3.4, Bordeaux, 2008, http://pari.math.u-bordeaux.fr/.

[14] W. Stein et al. Sage Mathematics Software (Version 4.6), The Sage Development Team, http://www.sagemath.org.

[15] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Iwanami and Princeton, (1971).

[16] V. Shokurov, *Shimura integrals of cusp forms.* Math. USSR Izvestiya, 603–646, (1981).

[17] W. Stein, *Modular forms, a computational approach.* Graduate Studies in Mathematics, **79**, AMS, Providence, (2007).

[18] Wolfram Research, Inc., *Mathematica, Version 7.0.* Champaign, IL (2008).

Pohang Mathematics Institute, POSTECH
Hyoja, San 31, Pohang 790-784, South Korea.
E-mail: ihara@postech.ac.kr, k_ihara72@yahoo.co.jp